

解説

PFリングにおける光軸安定化の現状

中村 典雄

高エネルギー物理学研究所放射光実験施設

Present Status of Beam Position Stabilization at Photon Factory Storage Ring

Norio Nakamura

Photon Factory, National Laboratory for High Energy Physics

Stabilization of photon beam position became a major issue in the operation of the storage rings dedicated as synchrotron radiation source. At the Photon Factory storage ring (PF ring), the orbit movement appeared remarkably when the low-emittance operation started. This orbit movement became a serious problem to synchrotron radiation users because the photon beam to drift with a large amplitude. The horizontal and vertical orbit feedback systems were constructed and developed in order to suppress the orbit movement globally. As a result, the horizontal and vertical orbit movements were reduced by a factor of five and ten, respectively. In addition, another type of feedback system using a local bump was constructed. In the test operation, this system could remove the fast photon beam motion as well as the slow photon beam drift for a beamline.

1. はじめに

近年、放射光リングにおいて光軸の安定化は1つの重要なテーマになってきた。放射光実験施設(PF)でも放射光ビームの変動を抑えることが3年前のリングの低エミッタンス化以来不可欠なものになっている。ここでは、光軸を不安定にするビーム変動とそれを抑え込むための光軸安定化システムの現状について述べることにする。PFリングでは1988年7月より電子に代わり陽電子による運転を行っているが、本稿に関する限り両者に本質的な差はないので電子という言葉を一時的に

使用することにする。

2. ビーム変動

PFリングでは1987年2月に、放射光ビームの輝度を上げるために電子ビームの低エミッタンス化が行われた¹⁾。この低エミッタンス化によって水平方向のエミッタンスは400nmradから130nmradになり、各ビームラインでの放射光ビームの輝度は以前と比較して2~20倍に高まった。しかし、一方で電子ビームは外乱に対して敏感に反応するようになり、種々のビーム変動が顕著に現れ始め

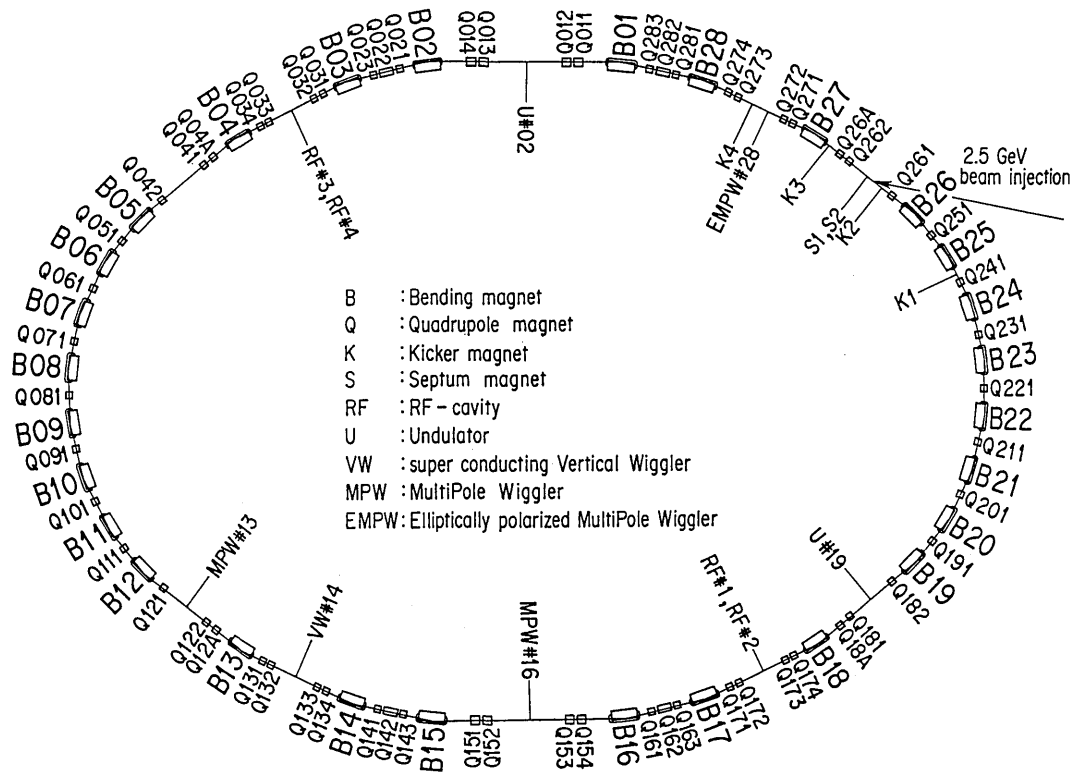


Fig. 1 Main ring components(bending and quadrupole magnets,kicker and septum magnets, insertion devices and RF cavities) .

た。これは、低エミッタンス化を行うために四極電磁石の磁場を強くしたことに依る。現在のPFリング(図1)で観測されているビーム変動について以下に述べる。

2.1 日較差変動

種々のビーム変動の中で低エミッタンス化後に最も放射光ユーザーにとって深刻な問題となったのが日較差変動である^{2), 3)}。低エミッタンス化前後に観測されたBL-21での垂直方向の放射光光軸の動き(光源点から10m地点)を図2に示す。低エミッタンス後において光軸変動の振幅は4~5倍に膨れ上がっていることがわかる。図からわかるように、この変動はほぼ1日を周期としていて正弦関数に似た動きをする。このような変動は他のビームラインでも観測され、ビームラインや光源点からの距離に依存して垂直方向では1~5mmの振幅を持っている。また、外気温や天候

に依存してその振幅を変えるという性質がある。例えば、晴れの日には振幅が大きく、雨や曇りの日は振幅が小さくなる。

日較差変動の原因はリングを覆っている建物が日射や外気との熱のやりとりによって僅かに変形するためであることがわかっている^{3), 4), 5), 6)}。この建物の熱変形はリングの変形を生み、電子ビームの軌道を変化させる。図3に1日における水平および垂直方向の電子軌道の変化を示す。その変化量は気象条件に依存して変わるが、その形は各方向ではほぼ一定している。水平成分はおもにリングの伸縮によって、垂直成分はリングの床が動いて電磁石列が乱れることによってその形を説明することができる。光軸の日較差変動はこの電子軌道の日較差変動に起因している。一般に光源点から距離Lだけ離れた光軸の位置変化(ΔY_p)は、光源点での電子ビームの位置及び角度の変化($\Delta Y, \Delta Y'$)を使って次のように表せる。

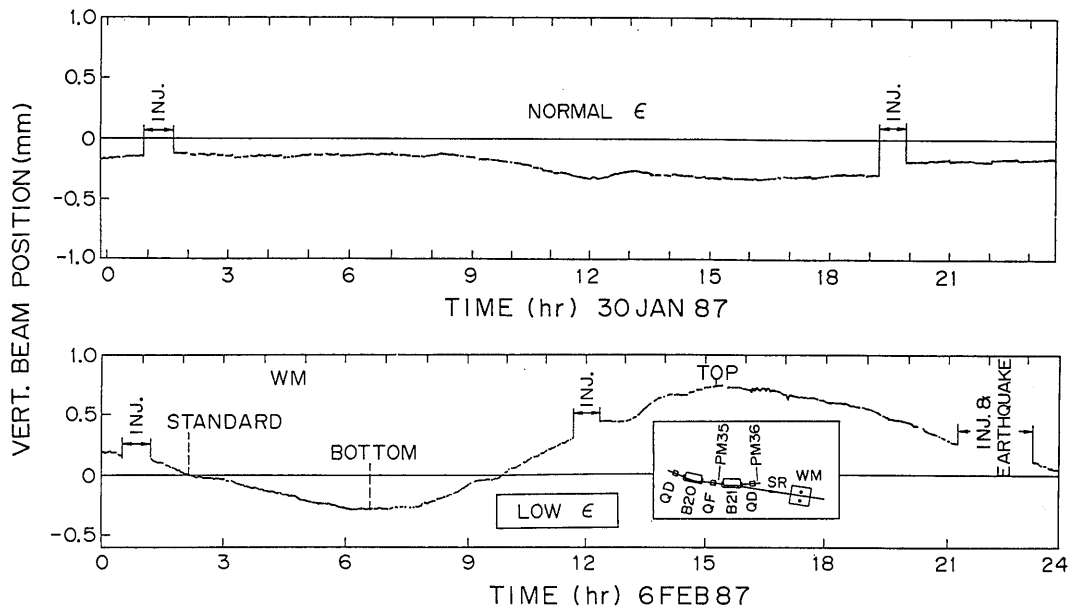


Fig. 2 Diurnal photon beam drift at BL-21 in normal-and low-emittance modes.

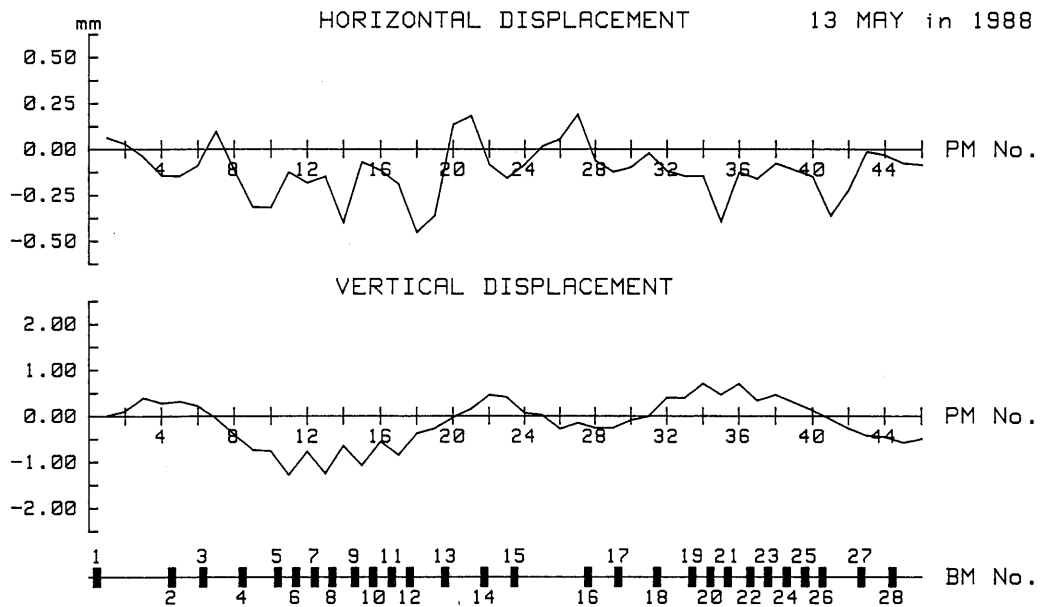


Fig. 3 Maximum orbit displacement in a day: difference of orbits measured at 15:00 and 6:00.

$$\Delta Y_p = \Delta Y + \Delta Y' \cdot L \quad (1)$$

これから光軸の変動量が各光源点でのビームの動きと光源点からの距離に依存することがわかる。

2.2 その他の変動成分

日較差変動以外にも種々のビーム変動が存在する。その変動量は日較差変動と比べると小さいが、ユーザー実験によっては問題となる可能性がある。まず、現在PFリングに6台置かれている挿入光源の磁場の設定変更に伴う軌道の変化がある。挿入光源自身、軌道補正のための電磁場を持っているが、軌道のパラメータが運転期間毎に微妙に変わるために完全に変動を抑えるには至っていない。従って、磁場の設定変更は現在のところビーム入射の時に行われている。図4にBL-4で観測された垂直方向の光軸変動を示す。図中の6分周期のビームの動きは僅かなリング電磁石用冷却水の温度変化(～1℃)と強く関連している。また、同じ研究所内のTRISTANリング電磁石の電子・陽電子ビーム加減速に伴う磁場の変化は、PFリングの電子ビーム軌道に影響を与える。その結果、階段状の位置変化が光軸に起こっている。さらに時間のスケールの小さな変動はどうなっているであろうか。図5に、BL-21の放射

光ビーム位置モニターの出力をFFTアナライザーで周波数分解した例を示す。AC電源による50Hz成分の他に、いくつかのピークがあることがわかる。これはリングトンネル用の空気冷却機や超伝導ウィグラー用の液体ヘリウム冷凍機等の振動が電磁石に伝わって電子ビームを揺らすためである⁷⁾。このような短周期変動は外国の放射光リングにも同様に現れている^{8), 9), 10)}。

3. 垂直方向の軌道フィードバック・システム^{2), 3)}

ここでは、垂直方向の日較差変動をリング全周にわたって抑え込むためのフィードバック・システムについて述べる。このシステムは計算機によって制御されているので、“デジタル”・フィードバック(DBF:digital feedback)とも呼ばれる。

3.1 システムの構成

図6にシステムの構成を示す。システムは大きく4つの装置に分けられる。それらは、電子ビームの軌道を測定する電子ビーム位置モニター(PM:position monitor)、電子ビームの軌道を補正する補正用電磁石(CVS, FVS)、光軸の位置をビームライン上で検出する放射光ビーム位置モニター、それにこれらを制御する制御計算機システムである。以下に各装置の説明を簡単に述べる。

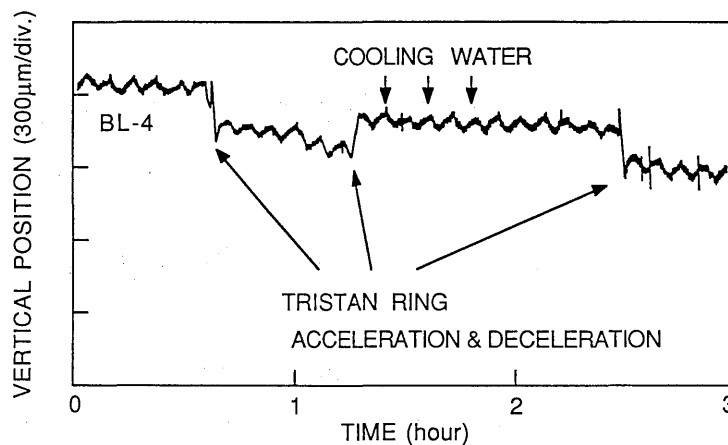


Fig. 4 Photon beam motion at BL-4

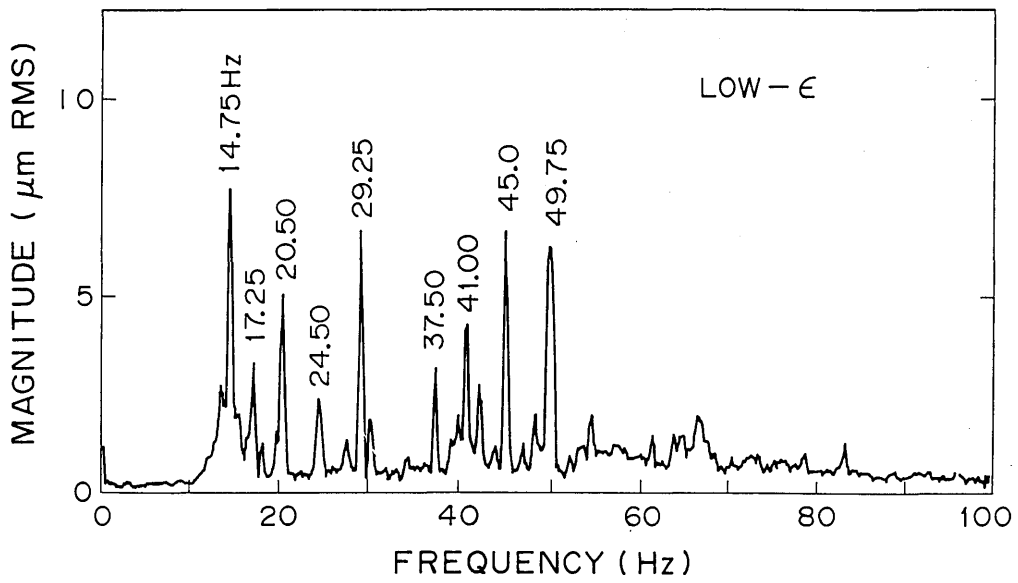


Fig. 5 Fast photon beam motion measured at BL-21 with an FFT analyzer.

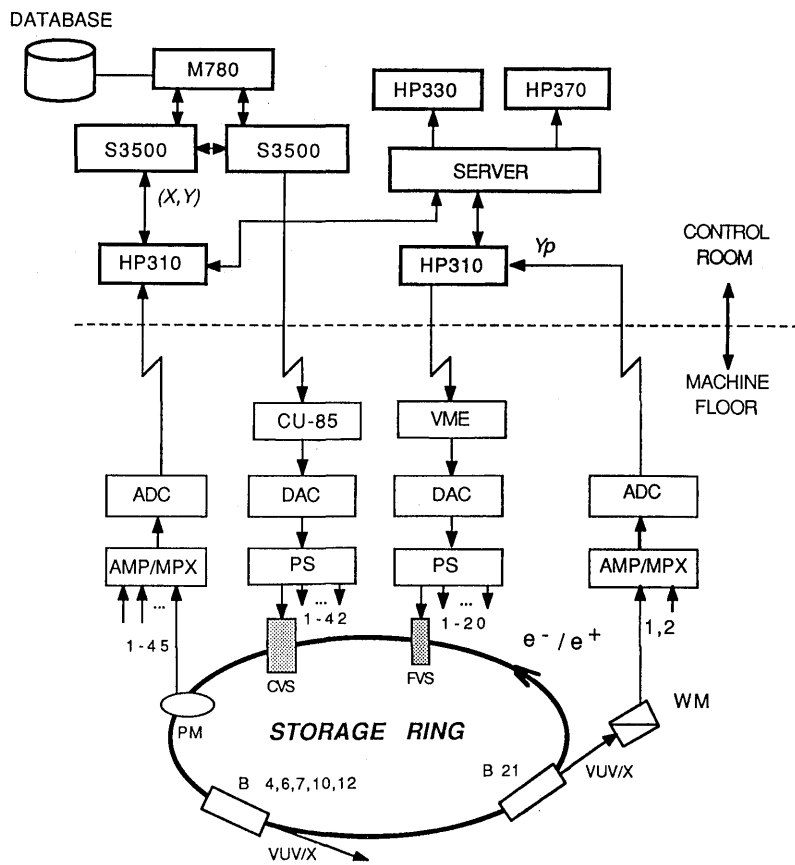


Fig. 6 Vertical orbit feedback system.

・電子ビーム位置モニター(PM)^{11), 12), 13)}

電子ビーム位置モニターは真空チェンバーに取り付けられた6つのボタン型電極から成っている。上下の2つの電極は通過する電子ビームの垂直方向の位置を、残りの左右4つの電極は水平方向の位置を求めるために使われる。このモニターは水平・垂直両方向の電子軌道の測定をするためにリング全周で45個配置されている。全部で45×6=270の電極信号を扱うための信号処理システムが設けられ、マルチプレクサー(MPX:multiplexer),増幅器(AMP:amplifier),ADC等で構成されている。最終的に電極信号は計算機(HP310)に送られ、電子ビーム位置に変換される。この1回の軌道測定に費やされる時間は約40秒である。電子ビーム位置モニターの相対的な位置精度は10 μ m程度であるが、マルチプレクサーの1つである同軸スイッチの劣化によって100 μ m以上に落ちることがときどき起きる。

・補正電磁石(FVS, CVS)

垂直方向の軌道を補正する電磁石にはCVSとFVSの2つの種類がある。CVS(coarse vertical steering magnet)は低エミッタンス化前から軌道補正用に備え付けられていた42台の電磁石であり、FVS(fine vertical steering magnet)はフィードバック用に新たに設けられた20台の電磁石である。FVSは芯が積層硅素鋼板でできていてコイルの巻数もCVSに比べて小さいために、磁場設定に対して速い応答性を有している。また、FVSの電源は16ビットのDACによって細かい磁場設定が可能になっている。従って、FVSはフィードバックのような速く細かい軌道補正に向いている。ただし、あまり高い磁場を出すことができないので、リング立ち上げ時の大きな軌道補正にはCVSが使われている。図6に示すように、各々の電源(PS:power supply)はCU-85やVMEといったコントローラを介して計算機から制御されている。

・放射光ビーム位置モニター^{14), 15), 16)}

放射光ビーム位置モニターは現在ビームラインBL-4, BL-7, BL-10, BL-12, BL-21に設置されて、光軸の動きを監視している。特にBL-21ではリング運転中常時シャッターが開けられていて、そのモニターからの位置データは計算機に送られている。放射光位置モニターはその構造上3種類に分かれ、各々two-wire photoemission monitor(WM), split ion chamber(SIC), split photoemission chamber(SEC)と呼ばれている。いずれも $\sim 1\mu$ m程度の位置分解能を有している。各種のモニターについての詳細は参考文献を参照していただくとしてここでは割愛する。

・制御計算機システム

制御計算機システムは基本的にはCVS, FVS, 電子ビーム位置モニターをそれぞれ制御する3つの計算機(S3500, HP310, HP310)から成る。S3500ミニコンピュータはCVSの他に偏向電磁石や四極電磁石などリング及びトランスポート・ラインの電磁石全般の制御を行っている。2つのHP310マイクロコンピュータはフィードバック用に新たに加えられたものである。これらの計算機はサーバ(server)でつながれていて、データの通信や保存を容易に行うことができる。また、他のHP計算機(HP330, HP370)からも容易にデータを利用することができる。HP310で得られた軌道データは大型計算機(M780)のデータベース(database)にも保存されて、大量なデータ処理や複雑な解析等に使われている。

3.2 フィードバック方式とその評価

PFリングでは固定パターン方式と変動パターン方式と呼ばれる2つの種類のフィードバック方式がある。これまで通常の運転では固定パターン方式が使用されてきたが、変動パターン方式が1989年11月から実用化されている。

(a) 固定パターン方式

軌道の変化を補正するために20台の補正電磁石に流すコイル電流のパターンを固定している。す

なわち、垂直方向の日較差変動による電子軌道の変化の形が一定であると仮定している。実際には次のような手続きに従って行われる。

- ① 日較差変動による電子軌道の歪みの形を電子ビーム位置モニターで測定する。
- ② 測定された軌道の歪みを補正するために必要な電流値を20台の補正電磁石(FVS)について計算する。
- ③ 計算された電流値を細分割して、BL-21の放射光ビーム位置モニターで $5\mu\text{m}$ の変位に対応する補正電流ユニットを作る。
- ④ 42台の補正電磁石(CVS)で運転開始時に初期の電子軌道を設定し、同時にBL-21での光軸の初期位置を決める。
- ⑤ BL-21での位置が初期値から $5\mu\text{m}$ ずれる度に、補正電流ユニットを補正電磁石(FVS)の現在の電流値に加えて日較差変動を補正する。

①～④の手続きは予めリング運転前に行われる。従って通常、運転中は⑤のみが計算機を通して繰り返し実行される。BL-21でビーム位置を読んで補正電磁石によって電子軌道を補正するのに費やされる時間は2秒で、日較差変動に比べて十分に速いものになっている。図7にフィードバック停止中、図8に固定パターン方式によるフィードバック作動中の1日の軌道の変化を示す。フィードバックによってリング全周にわたって軌道の変化が良く抑えられていることがわか

る。固定パターン方式によるフィードバック作動中の1日の軌道の変位は日によって(気象条件によって)異なるが、各電子ビーム位置モニターの位置で平均して $\sim 100\mu\text{m}$ である。これはフィードバック停止中の軌道変位の約 $1/5$ である。ただし、日較差変動は完全に一定の軌道変化ではないので、日に依っては軌道変化の抑え残しが大きく出る。また、日較差変動以外の軌道変化に対応できないという欠点がある。

(b) 変動パターン方式

変動パターン方式では固定パターン方式と異なり電磁石への電流パターンは常に変化する。具体的な手順を以下に示す。

- ① 固定パターン方式同様、運転開始時にCVSを使って初期軌道すなわち基準軌道を設定する。
- ② 電子軌道を一定時間間隔(10分)で測定し、測定の度にデータをサーバ上のディスクに格納すると共に測定終了のフラッグをディスクに立てる。
- ③ 補正電磁石(FVS)を制御する計算機が測定終了のフラッグを確認し、測定された軌道データをサーバから読み込み基準軌道からのずれを求める。
- ④ さらに計算機が基準軌道からのずれを補正する電流パターンを計算し、そのパターンを数百ステップに分けて現在のコイル電流値に加える(1回の補正を数百ステップに分ける

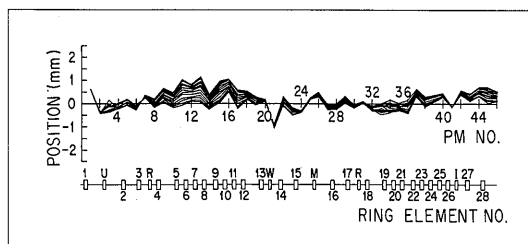


Fig. 7 Vertical orbit movement in a day without the vertical orbit feedback.

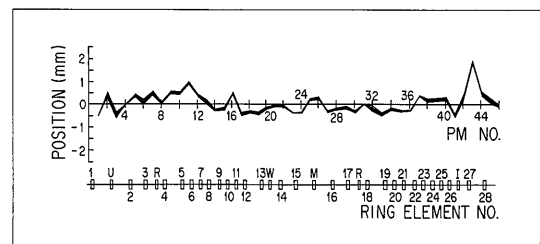


Fig. 8 Vertical orbit movement in a day without the vertical orbit feedback.

のは、補正による位置の変化を時間的にゆるやかにするためである)。

この方式は固定パターン方式と異なり日較差変動による軌道の変化のパターンが日々変化してもそれに対応することができる。加えて、日較差変動以外の軌道変化にも対応できるという利点がある。図9に示すように、変動パターン方式での軌道変化の抑え残しは固定パターン方式の時と比較して半分以上に減少している。この方式における今後の課題は、電子軌道の測定間隔を縮めていくことにある。それによって日較差変動の抑え残しも小さくなるし、もっと速い変動成分にもフィードバックが追従できることになるからである。しかし、現在のシステムでは時間間隔をこれ以上短

くしても電子ビーム位置モニターによるビーム位置測定の誤差がビームの変動量よりも大きくなってしまふ。また、測定回数の増加は同軸スイッチの劣化を速めることにもつながる。従って、この方式をさらに発展させるには電子ビーム位置モニター系の改良が必要となってくるであろう。

4. 水平方向の軌道フィードバックシステム¹⁷⁾

日較差変動の水平方向の成分は、2章で述べたように主にリングの伸縮によって生じている。リングが伸縮するとビーム位置は相対的に変化し、特に分散関数(dispersion function)の大きいところで変化が顕著になる。従って、その変化は図

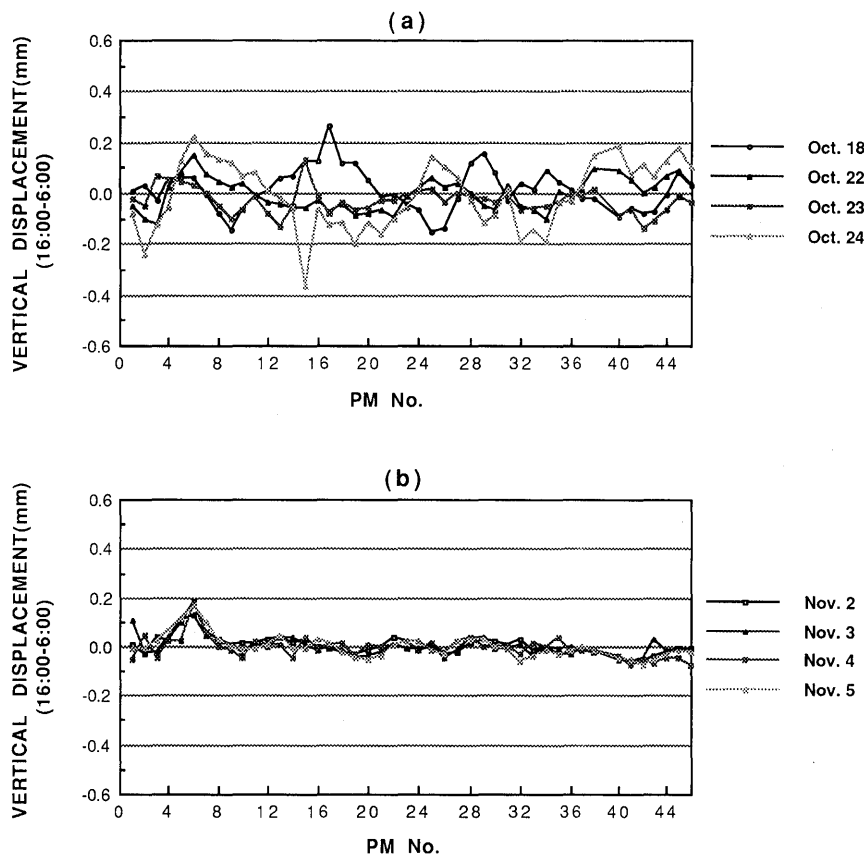


Fig. 9 Residual vertical orbit displacements in (a) fixed pattern and (b) variable pattern methods: differences of orbits measured at 16:00 and 6:00.

3にみられるように分散関数の形を反映している。この軌道変化を補正するために、RF周波数を変更して電子ビームの軌道長をリングの伸縮に追従させるシステムが必要である。それがここで述べるフィードバック・システムである。図10にこのシステムの構成及びフィードバックの流れを示す。このシステムでも電子ビーム位置モニターが水平方向の電子軌道を測定するために使われている。定間隔(10分)で測定されたビーム位置を用いてリングの伸び(あるいは縮み) ΔC を次式に基づいて計算する。

$$\frac{\Delta C}{C} = -\alpha \frac{\sum \Delta x_i \eta_i}{\sum \eta_i^2} \quad (i = 1, \dots, 45) \quad (2)$$

ここで $\Delta x_i, \eta_i$ はそれぞれ水平方向の電子ビームの位置変化とそこでの分散関数の値である。また、 C はリングの周長で α は momentum compaction factor である。これから加えられるべきRF周波数の増分 Δf_{RF} は次のようになる。

$$\Delta f_{RF} = -f_{RF} \frac{\Delta C}{C} \quad (3)$$

RF周波数の変更は軌道測定用計算機からRFシステムに伝えられ実行される。図11にフィードバック作動中とフィードバック停止中の1日の軌道の変位を示す。水平方向の変動はフィードバックによって約1/5に減っていることがわかる。

5. ローカルバンプリングを用いたフィードバック・システム^{2), 8), 18), 19), 20), 21)}

これまでに述べられてきたフィードバックは、

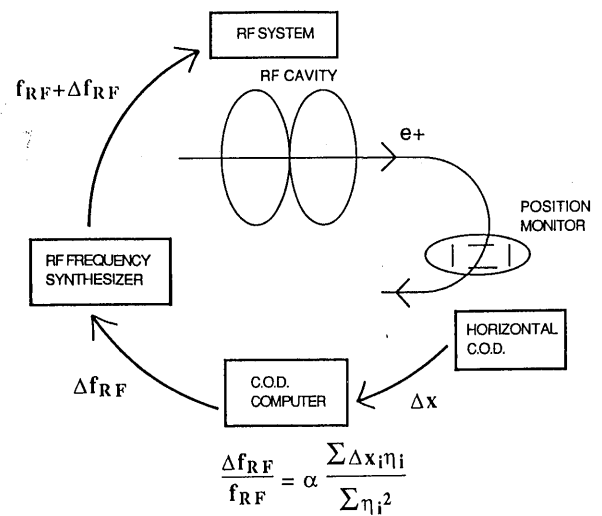


Fig.10 Horizontal orbit feedback system.

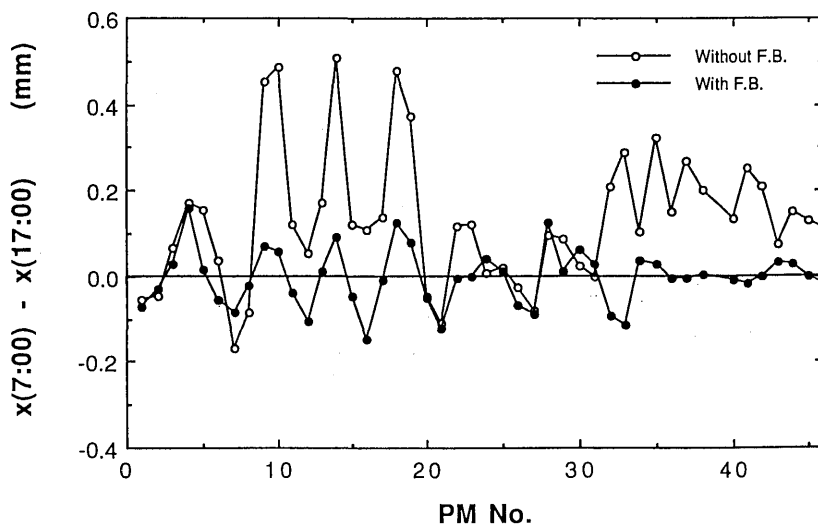


Fig.11 Horizontal orbit displacements with and without the horizontal orbit feedback.

比較的ゆっくりとしたビーム変動(日較差変動)をリング全周にわたって抑えるものであった。ここでは、もっと速い成分を含んだビーム変動を局部的に(例えば1つのビームライン毎に)抑えるフィードバックについて述べる。このフィードバックでは補正電磁石を用いて作られるローカルバンパ(local bump)を利用する。図12に3つの補正電磁石(FVS)を用いて作ったローカルバンパの例を示す。図からわかるように1つの偏向電磁石(BO4)を中心に垂直方向の軌道の山ができています。ただし、その他の場所には何の変化も起こさないようになっている。ビームライン(この場合BL-4)で測定された光軸の位置の変化と逆位相のローカルバンパを発生させることでビーム変動を抑えることができる。

このフィードバックはアナログ的にもデジタル的にも扱うことができるが、PFリングでは図13に示すようにアナログ回路によってシステムが構成されている。その意味でこのシステムは“アナログ”・フィードバック(AFB:analog feedback)・システムとも呼ばれている。アナログの場合デジ

タルと比較してノイズに弱く取扱いが難しいが、より速い変動成分を抑えることができる。まず、ビームラインの放射光ビーム位置モニターで光軸の位置変化を感知し、その信号をサーボ・コントローラ(servo controller)に渡す。サーボ・コントローラはシステムの周波数特性や信号のgainを調整して、フィードバックの安定化及び最適化を行う。その後、信号はローカルバンパを作るための電流比を生み出す回路(bump ratio controller)を経て、3つの補正電磁石電源に送られる。途中、サムアンプ(sum amplifier)を通じてDFBシステムのDAC信号との和が取られるので、DFBとの共存ができるようになっている。

図14にBL-12で行われたシステムの試行実験結果を示す。上図はBL-12のWMからの信号をFFTアナライザーで出力したものであり、下図はチャート・レコーダーで記録したものである。図からわかるように、AFBによってゆっくりとしたビーム変動の他に速い成分もよく抑えられている。

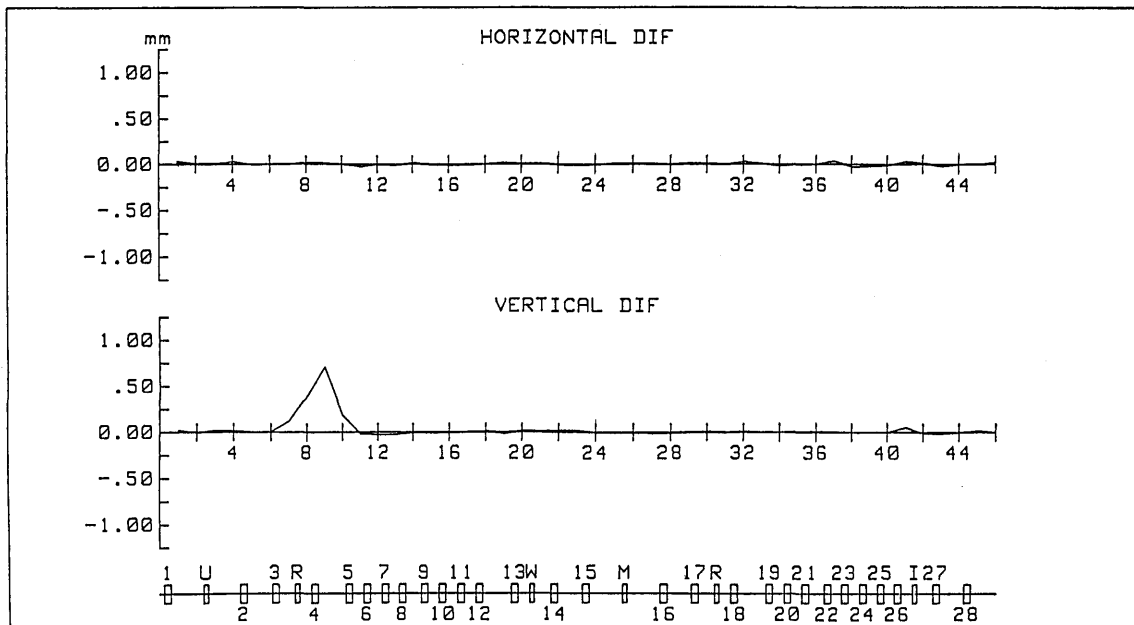


Fig.12 Example of a local bump.

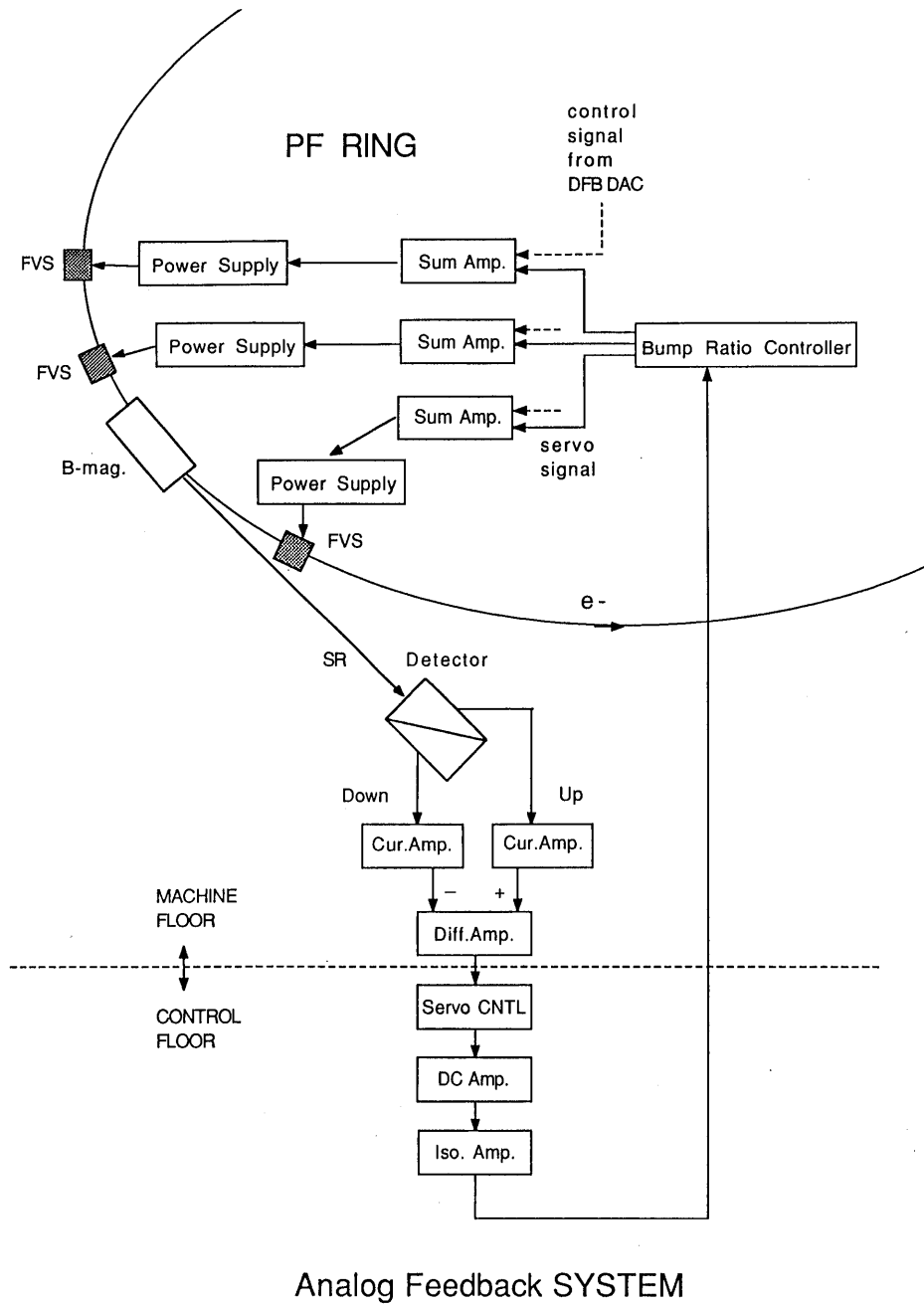


Fig.13 Feedback system using a local bump.

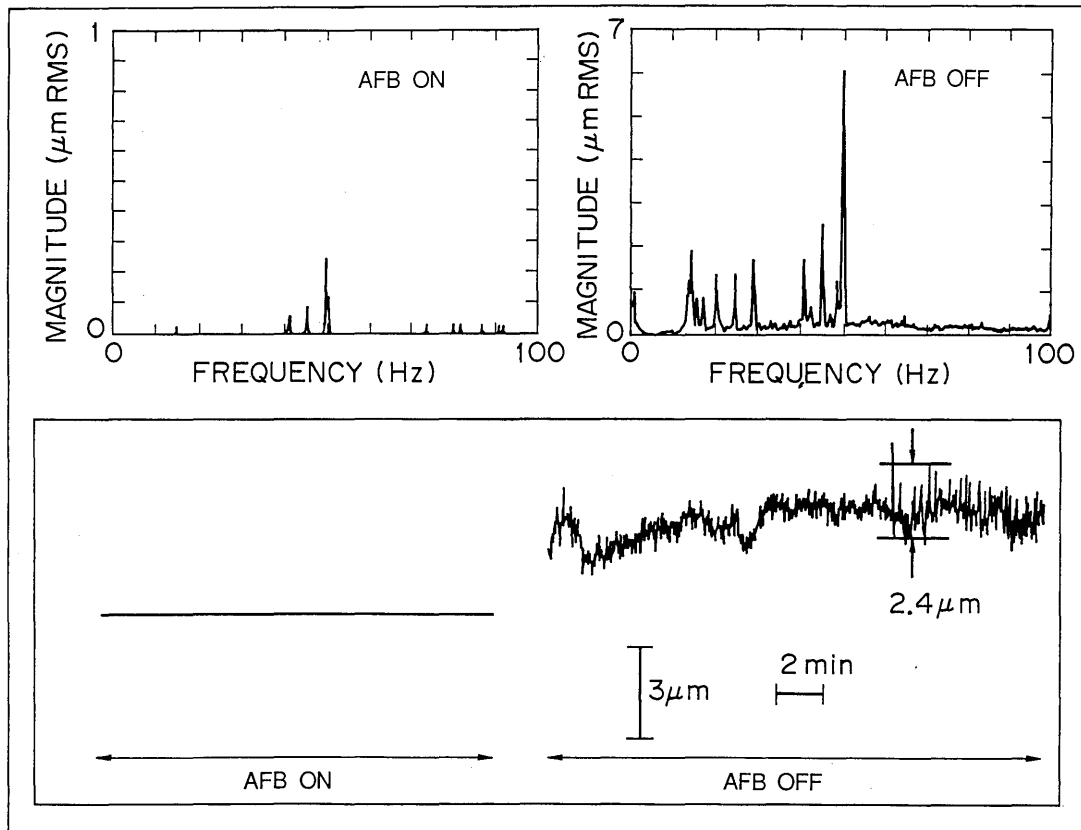


Fig.14 Photon beam motion without and with the analog feedback system. The upper histograms were obtained with an FFT analyzer and the lower traces were recorded with a chart recorder.

7. まとめ

軌道フィードバック・システムによってビーム変動は低エミッタンス化直後と比較して水平方向で約1/5, 垂直方向で約1/10 (変動パターン方式) に減少した。今後は軌道フィードバック・システムをさらに発展させるとともに, ローカルバンプを用いたフィードバック・システムを実用化させることが課題である。それと同時にビーム変動の原因を直接取り除いてしまうことも考えていきたい。既に日較差変動の原因である建物の熱変形を抑えるための屋根の断熱工事が完了し, その効果を評価する段階に入っている。これについては後に詳しい報告があるのでここでは省略させて

いただくことにした。

最後に, 光軸安定化の責任者である桂共太郎助教授, フィードバック・システム全般について共同開発を行ってきた神谷幸秀助教授, 芳賀開一助手に謝意を表す。また, 放射光ビーム位置モニター開発の中心となっている三橋利行助手, フィードバックに必要なリングのパラメータを提供していただいた加藤政博助手に感謝する次第である。

文献

- 1) Y.Kamiya, M.Katoh, I.Honjo, A Araki, and M.Kihara, Proc. of the IEEE Particle Accel. Conf., **455** (1987).
- 2) T.Katsura, Y.Kamiya, K.Haga, and T.Mitsuhashi, Proc. of the IEEE Particle Accel. Conf., **538** (1987).
- 3) T.Katsura, Y.Kamiya, K.Haga, and T.Mitsuhashi, N Nakamura, M.Katoh, and I.Abe, Rev. Sci. Instrum., **60**, 1507 (1989).
- 4) K.Huke, Rev. Sci. Instrum., **60**, 1382 (1989).
- 5) T.Katsura, Y.Kamiya, T.Mitsuhashi, N.Nakamura, K.Haga, and A.Iida, Rev.Sci.Instrum., **60**, 1957 (1989).
- 6) N.Nakamura, A.Araki, K.Haga, Y.Kamiya, T.Katsura, and Y.Inoue, Submitted to the 14th Int. Conf. on High Energy Accel., 1989 Tsukuba, Japan.
- 7) K.Huke, Jpn. J. Appl. Phys., **26**, 285 (1987).
- 8) R.O. Hettel, IEEE Trans. Nucl. Sci., **NS-30**, 2228 (1983).
- 9) L.H.Yu. R.J.Nawrocky, and J.Galayda, IEEE Trans. Nucl. Sci., **NS-32**, 3394 (1985).
- 10) W.Brefeld, Nucl. Instrum. Methods, **A261**, 22 (1987).
- 11) T.Katsura, H.Nakagawa, and S.Shibata, IEEE Trans. Nucl. Sci., **NS-30**, 2353 (1983).
- 12) T.Katsura and S.Shibata, KEK-Report 79-27 (1979).
- 13) N.Nakamura, K.Haga, T.Katsura, and Y. Kamiya, KEK-Internal 88-14 (1988).
- 14) 桂 共太郎, 放射光を利用したビーム・モニター OHO'86
- 15) T.Mitsuhashi, K.Haga, and T.Katsura, Proc. of the IEEE Particle Accel. Conf., 576 (1987).
- 16) 佐々木 聡, 三橋利行, 放射光学会誌第2巻第4号.
- 17) K.Haga, Y.Kamiya, M.Katoh, T.Katsura, T. Mitsuhashi, and N.Nakamura, Submitted to the 14th Int. Conf. on High Energy Accel., 1989, Tsukuba, Japan
- 18) T.Katsura, Y.Kamiya, K.Haga, T.Mitsuhashi, and R.O Hettel, Proc. of the 13th Int. Conf. on High Energy Accel., Vol.2, 243 (1986).
- 19) R.O.Hettel, Nucl. Instrum. Methods, **A266**, 155 (1988).
- 20) R.J.Nawrocky, J.W.Bittner, L.Ma, H.M.Rarback, D.P.Siddons, and L.H.Yu, Nucl. Instrum. Methods, **A266**, 164 (1988).
- 21) W.Brefeld, Rev. Sci. Instrum., **60**, 1523 (1989).

きいわーど

エミッタンス(emittance)

リングを周回する1つの荷電粒子を考える(ただしシンクロトロン放射の影響を考えない)場合、エミッタンス ε は粒子が位相平面(x, x')上で描く軌跡(楕円)の面積を π で割ったものである。すなわち、

$$\pi \varepsilon = \iint dx dx'$$

である。ここで、x, x'は粒子のリング中心からの水平または垂直方向の位置と傾きである。この場合、エミッタンスはリングの場所に依存しない不変量になる。しかし、電子の場合にはシンクロトロン放射を行うので個々の電子のエミッタンスは時間的にランダムな変化をする。それでも電子ビームという集団を考えた場合には、エミッタンスは平衡状態においてある決まった幅を持つガウス分布になる。通常、そのガウス分布の 1σ をもってビームのエミッタンスと呼んでいる。エミッタンスとビームサイズとは密接な関係があり、ビームサイズを絞って放射光の輝度を高めるためにはビームのエミッタンスを下げる必要がある。

分散関数(dispersion function)

簡単のために電子が偏向電磁石がつくるような一様磁場中を通る場合を考える。このとき電子は円運動を行うが、電子の運動量が大きいとその半径あるいは周長は長くなる。偏向電磁石の他に四極電磁石が入った実際のリングでは軌道はやや複雑になるが、やはり運動量の大きなビームはより外側を回り軌道長は長くなる。リング上のある点sにおいて Δp だけ運動量のずれた電子の水平方向の位置変化 Δx は次のように表される。

$$\Delta x(s) = \eta(s) \cdot (\Delta p/p)$$

このときの比例係数 $\eta(s)$ が分散関数である。建物の熱変形でリングの周長が伸びると、電子はリング中心より内側を回ることになり運動量が小さくなったことと同等の結果を生む。

RF周波数

高周波加速空洞(RF cavity)ではビームの進行方向に高周波電場をかけてシンクロトロン放射で失われるエネルギーを補給している。その高周波電場の周波数をRF周波数と呼んでいる。RF周波数 f_{RF} は電子がリングを1周する周波数 f_0 (周回周波数)と次のような関係になっている。

$$f_{RF} = h \cdot f_0$$

ここで、hはharmonic numberと呼ばれる整数で、電子ビームは最大でharmonic numberだけバンチ数を持つことができる。また、RF周波数の変化は電子の軌道長Cを変化させ次式が成り立つ。

$$\Delta f_{RF}/f_{RF} = -\Delta C/C$$

momentum compaction factor

一般に、電子の運動量(p)が大きいとリング内での電子の軌道長(C)は長くなる。それを式にすると、

$$\Delta C/C = \alpha \cdot (\Delta p/p)$$

となる。この係数 α をmomentum compaction factorと呼ぶ。momentum compaction factorはリングの分散関数 $\eta(s)$ と曲率半径 $\rho(s)$ を使って

$$\alpha = \oint (\eta / \rho) ds \cdot (1/C)$$

と表わすことができる。ここで、 $\oint ds$ はリング一周の積分を意味する。